第 3 节 比较指、对数的大小：估算（★★★）

内容提要

比较大小是常见题型，本节解决较为基础的比大小问题，这类题首选估算（在哪两个整数之间），若估算比较不出来，就看数据形式：

1．形式不相近：作差、作商或寻找一个中间量来比较，例如 a 和 b 都在 $(0,1)$ 上，可把 a，b 再与 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$ 等常见量比较.

2．形式相近：若结构完全相同，则直接构造函数分析；若形式类似，可考虑通过放缩成一致结构，再构造函数分析，这类题难度较大，放到了模块七.

3．若所给数据非常接近，且有部分数字重复出现，则可以将重复出现的数字看成 x，构造函数分析，这类题难度较大，放到了模块七.

典型例题

类型Ⅰ：估算、选择中间量辅助比较

【例 1】（2021・天津）已知 $a=\log_2 0.3$，$b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4$，$c=0.4^{0.3}$，则三者的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

解析： 先进行粗略估算，判断各数据的正负，$a=\log_2 0.3<0$，显然 b 和 c 都大于 0，所以 a 最小，

b，c 都为正，再看看它们与 1 的大小，$b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4>\log_{\frac{1}{2}} 0.5=1$，$c=0.4^{0.3}<0.4^0=1$，所以 $a<c<b$.

答案：D

【反思】 ①对数判正负口诀：同正异负，“同正”指底数和真数同时大于 1 或同时小于 1，则对数为正，“异负”指底数和真数一个大于 1 一个小于 1，则对数为负；②粗略估算往往是判断各数据与 0，1 等整数的大小关系.

【变式】设 $a=\log_2 1.8$，$b=e^{\frac{3}{5}}$，$c=\log_3 15$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$a<c<b$　　（C）$b<a<c$　　（D）$c<a<b$

解析： 先估计它们所在的整数区间，$0<\log_2 1.8<1$，$2=\log_3 9<\log_3 15<\log_3 27=3$，$1=e^0<e^{\frac{3}{5}}<e<3$，

通过简单的估算得到 b 在 $(1,3)$ 上，不妨再比较 b 和 2 的大小，得到更准确的范围，可作商来看，

$(\frac{e^{\frac{3}{5}}}{2})^5=\frac{e^3}{2^5}<\frac{3^3}{2^5}=\frac{27}{32}<1\Rightarrow\frac{e^{\frac{3}{5}}}{2}<1\Rightarrow e^{\frac{3}{5}}<2$，所以 $0<a<1<b<2<c<3$.

答案：A

【例 2】（2021・新高考Ⅱ卷）已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_8 3$，$c=\frac{1}{2}$，则下列判断正确的是（　　）

（A）$c<b<a$　　（B）$b<a<c$　　（C）$a<c<b$　　（D）$a<b<c$

解析：粗略估算知 a,b 都在 $(0,1)$ 上，而 $c=\dfrac{1}{2}$，可能是中间量的提示，故把 a,b 和 $\dfrac{1}{2}$ 比，可化同底来看，

$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}=c$，$b=\log_8 3>\log_8(2\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}=c$，所以 $a<c<b$.

答案：C

【变式】已知 $a=\sqrt{3}$，$b=\log_2\sqrt{3}$，$c=\log_3\sqrt{2}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$b>a>c$　　（D）$c>b>a$

解析：粗略估算可得 $a>1$，b，c 都在 $(0,1)$ 上，所以 a 最大，再比较 b，c，当两个数据都在两相邻的整数之间时，可以先试试选两整数的中间值为中间量来比较，比如本题可选 $\dfrac{1}{2}$，

$b=\log_2\sqrt{3}>\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$，$c=\log_3\sqrt{2}<\log_3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，所以 $b>c$，故 $a>b>c$.

答案：A

【总结】比较大小这类题，往往先尝试把各数据估算在相邻的两个整数之间，如 $(0,1)$，$(1,2)$ 等，看能否找出最大的一个或最小的一个，对于都在同样两个整数之间的数据，再选择与中点、三等分点等比较.

类型 II：综合比较大小

【例 3】（2020·新课标III卷）已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$，设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13}8$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$b<a<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

解法 1：粗略估算会发现 a，b，c 都在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上，所以不易通过简单的中间量法比较大小，此时可观察题目条件，给出的是指数关系，要比较的却是对数大小，所以要把指数化成对数研究，要比较的三个对数底数都不一样，化同底是基本的思考方向，先全部化为自然对数，

$a=\log_5 3=\dfrac{\ln 3}{\ln 5}$，$b=\log_8 5=\dfrac{\ln 5}{\ln 8}$，$c=\log_{13}8=\dfrac{\ln 8}{\ln 13}$，再把已知的两个不等式取自然对数，恰好也会出现 $\ln 5$，$\ln 8$，$\ln 13$ 这些数据，这样思路就出来了，

$5^5<8^4\Rightarrow 5\ln 5<4\ln 8\Rightarrow\dfrac{\ln 5}{\ln 8}<\dfrac{4}{5}$，所以 $b<\dfrac{4}{5}$；$13^4<8^5\Rightarrow 4\ln 13<5\ln 8\Rightarrow\dfrac{\ln 8}{\ln 13}>\dfrac{4}{5}$，所以 $c>\dfrac{4}{5}$，故 $b<c$；

到此为止，已知的两个不等式都用了，接下来的比较得想其它办法，若没有方向，不妨对 a，b 作差，

$a-b=\dfrac{\ln 3}{\ln 5}-\dfrac{\ln 5}{\ln 8}=\dfrac{\ln 3\ln 8-\ln^2 5}{\ln 5\ln 8}$，

这里 $\ln 3\ln 8$ 没有公式可用于计算，但 $\ln 3+\ln 8$ 有，可利用不等式 $ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2$ 来变乘为加，

因为 $\ln 3\ln 8<(\dfrac{\ln 3+\ln 8}{2})^2=(\dfrac{\ln 24}{2})^2=(\ln\sqrt{24})^2<(\ln 5)^2$，所以 $a-b<0$，从而 $a<b$，故 $a<b<c$.

解法 2：b，c 的比较同解法 1，a，b 的比较也可以选用中间量法，但中间量不易发现，通过分析我们不难

得出 a，b 都在 $(\frac{1}{2},1)$ 上，可尝试取区间中点 $\frac{3}{4}$ 作为中间量来比较，将 $\frac{3}{4}$ 与要比较的对数化同底来看，

因为 $\frac{3}{4}=\log_5 5^{\frac{3}{4}}$，所以要比较 a 和 $\frac{3}{4}$ 的大小，只需比较 $5^{\frac{3}{4}}$ 与 3 的大小，

把它们同时 4 次方可得 $(5^{\frac{3}{4}})^4=5^3=125>3^4=81$，所以 $5^{\frac{3}{4}}>3$，从而 $\log_5 5^{\frac{3}{4}}>\log_5 3$，即 $a<\frac{3}{4}$，

因为 $\frac{3}{4}=\log_8 8^{\frac{3}{4}}$，所以要比较 b 和 $\frac{3}{4}$ 的大小，只需比较 $8^{\frac{3}{4}}$ 和 5 的大小，

把它们同时 4 次方可得 $(8^{\frac{3}{4}})^4=8^3=512<5^4=625$，所以 $8^{\frac{3}{4}}<5$，从而 $\log_8 8^{\frac{3}{4}}<\log_8 5$，即 $b>\frac{3}{4}$，故 $a<b$.

答案：A

【反思】①上述解法中 a 和 b 的比较，可用中间量 $\frac{3}{4}$，但这一中间量不易发现，遇到这种情况，作差（或作商）比较也是好的选择；②当遇到对数乘积时，用不等式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$ 变积为和是可以考虑的方向.

强化训练

1．（2022•重庆模拟•★★）$a=\log_3\frac{1}{2}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=3^{-0.1}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c>b>a$　　（B）$c>a>b$　　（C）$a>c>b$　　（D）$a>b>c$

2．（2023•全国模拟•★★）已知 $a=3^{-2}$，$b=2^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_2 5$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

3．（2022•安徽模拟•★★★）已知 $a=\log_3 4$，$b=\log_5 9$，$c=\frac{4}{3}$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

4．（2022•焦作三模•★★★）若 $a^3=2$，$2^b=6$，$3^c=8$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a<c<b$　　（B）$c<a<b$　　（C）$a<b<c$　　（D）$b<a<c$

5．（2022・南昌模拟・★★★）已知偶函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，若$a=f(\log_2\frac{1}{5})$，$b=f(\log_3 18)$，$c=f(2^{0.8})$，则a，b，c的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$b<a<c$　（C）$c<b<a$　（D）$c<a<b$

6．（★★★）已知$a=\log_2 3$，$b=\log_3 4$，$c=\log_4 5$，则实数a，b，c的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$a>b>c$　（C）$b>a>c$　（D）$b>c>a$